【DOI】10.12315/j.issn.1673-8160.2021.22.001

中国上市公司分离式可转债定价研究
——基于LSM模型

荆　嵋
（河南开放大学，河南 郑州 450000）

摘　要：分离式可转债作为一种重要的上市公司再融资工具，其合理定价是其有效流通的前提。分离式可转债的价值可以分离为公司债的价值与认股权证的价值，公司债券的价值可以通过对未来的现金流折现得到，而认股权证基本上都是百慕大期权①，因此本文将通过更适用于美式期权和百慕大期权的LSM模型来研究认股权证的价值，并将模拟结果与带稀释效应的BS模型结果和实际价格进行比较分析。实证模拟后得到的结论发现，在我国分离式可转债市场中，纯债部分的实际价值与理论价值较吻合，而权证部分的实际价格基本上都大于其真实价值，投机气氛较浓。

关键词：分离式可转债；认股权证；最小二乘蒙特卡洛模拟；百慕大式期权

在我国资本市场的发展过程中，随着企业对融资需求的加大，各种金融工具不断涌现，分离式可转债就是在这种条件下出现的。在分离式可转债发行之后，认股权证部分与纯债部分是分别上市的。这种融资工具对于企业而言最大的优点就是既可以降低融资成本，又可以实现两次融资，因为分离式可转债的利率相对于普通债而言是偏低的，同时在行权日时，投资者必须重新拿出自己的资金来进行股票的认购，这便实现了企业的二次融资。由此可见，分离式可转债是一个比较新颖也是非常重要的融资工具。

分离式可转债作为一种重要的上市公司再融资工具，合理定价是其有效流通的前提。只有有了合理的定价，才能使得分离式可转债在资源配置中发挥正确而有效的作用。如果定价过高，则使得投资者不愿意对可转债进行投资；反之，如果定价过低，则发行公司的融资成本将会上升，影响分离式可转债的有效发行。因此选用什么样的模型来对分离式可转债的认股权证进行定价成了重点和难点。

国内在研究分离式可转债方面，主要是从分离式可转债与普通可转债的区别以及如何对分离式可转债进行定价两方面着手，在定价方面主要是利用修正的BS模型对其进行定价，其中主要是带稀释效应的BS模型，本文认为LSM模型是一种更适用于美式期权和百慕大期权的定价方法，所以将会对带稀释效应的BS模型与LSM模型进行比较。用以促进合理定价，使得分离式可转债能在资本市场的资源配置中发挥有效的作用。[1]

一、纯债价值模型、LSM模型、带稀释效应的BS模型分析

（一）纯债价值模型

分离式可转债的纯债价值主要是由其未来的现金流折现得到。这里影响纯债价值的主要因素数包括票面利率、票面面额、市场利率以及剩余期限，同时还有付款方式的影响。下面是纯债价值的计算公式：

$$PB=\sum_{t=1}^{t=T}\frac{I_t}{(1+r)^t}+\frac{B}{(1+r)^T} \qquad (1)$$

上述式子中，PB表示将普通债券贴现后的贴现值，B是分离式债券票面价值，T是分离式债券到期日，r是市场利率，I_t是每期获取的利息。由上式可以看出，其他条件不变的情况下，市场利率越高，纯债的价值越低；票面价值越高，纯债的价值越高；利息越高，纯债的价值越高。

（二）LSM模型

最小二乘蒙特卡洛模拟方法是基于蒙特卡洛模拟定价方法提出来，因此与其存在着许多的相似之处。最小二乘蒙特卡洛模拟方法的基本过程如下：首先根据资产价格的运动规律模拟出一条运动路径，然后从最后一个行权日期开始，计算期权的价格，再将得到的期权价格按照无风险利率进行折现，并与前交易日的期权价格进行比较，取其大者，再与前一交易日的比较，以此类推，直至得到初始日的期权价格，最后进行多次模拟取平均值，这个平均值便是利用LSM方法求得的期权价格。[2]

接下来我们运用LSM方法对美式看跌期权进行定价，步骤如下：

第一步：按照基础资产的运动规律随机生成多条样本路径

现设一单个标的资产美式看跌期权的持有到期日为T，期权的执行时刻为T^*，$t^*\in[0,T]$，标的资产价格为S，期权的执行价格为X。在风险中性条件下，该期权的初始时刻价值为：

$$P=E^Q[\exp(-rt^*)f(S_0,S_1,\cdots,S_{t^*},\cdots,S_T)] \qquad (2)$$

其中，$S_0,S_1,\cdots,S_{t^*},\cdots,S_T$为标的资产价格的路径，$f(S_0,S_1,\cdots,S_{t^*},\cdots,S_T)$是在最优执行时刻$t^*$的期权价值。上式定义的$P$便是将要运用最小二乘蒙特卡洛方法进行模拟的期权价值。

将期权的存续区间$[0,T]$均分为N个子区间，则每个子区间的长度为$\Delta t=\frac{T}{N}$，标的资产价格过程的离散形式：

$$S_i=S_{i-1}\exp((r-\frac{\sigma^2}{2})\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}\,\varepsilon_{i-1}) \qquad (3)$$

其中，$i\in\{0,1,\cdots,N\}$，随机变量ε服从标准正态分布。因此，利用生成随机数模拟得到标的资产价格S的一条样本路径$S_0,S_1,\cdots,S_N$，重复执行M次模拟，我们可得到资产价格的总样本$S_{M\times(N+1)}$。

第二步：计算各个样本的最优停时及各时刻的期权价值

对于美式看跌期权，在期权的有效时刻i，样本路径j上的内在价值为$I(S_i^j)=\max\{X-S_i^j,0\}$，持有价值为$H(S_i^j)=E^Q[\exp(-r\Delta t)C(S_{i+1})|S_i^j]$。根据美式期权的特点，必须比较该时刻期权的内在价值$I(S_i^j)$与持有价值$H(S_i^j)$的大小，从而确定是行权还是继续持有。

$$C(S_i^j)=\max\{I(S_i^j),H(S_i^j)\} \tag{4}$$

由期权的持有价值表达式可知它依赖于下一步期权决策的价值，需通过逆向求解这个期望价值，这正是普通的蒙特卡洛模拟法为美式期权定价的难点所在。最小二乘蒙特卡洛模拟方法通过建立一个当前时刻标的资产价格与下一时刻期权价值贴现值的线性回归计量模型：

$$Y_j=\exp(-r\Delta t)C(S_{i+1}^j)=a_1+a_2S_i^j+a_3{S_i^j}^2+\mu_j \tag{5}$$

上述模型以所有样本路径在时刻i的价格S_i和S_i^2作为解释变量，同时我们将被解释变量设为下一刻期权价值的限制。再使用普通最小二乘回归法求得回归系数的估计值$\hat{a}_1,\hat{a}_2,\hat{a}_3$和样本回归方程$\hat{Y}_j=\hat{a}_1+\hat{a}_2S_i^j+\hat{a}_3{S_i^j}^2$；再将各个资产价格样本代入到回归方程分别可以得到其期权的持有价值估计值。

$$\hat{Y}_j=E[Y|S_i^j]=E[\exp(-r\Delta t)C(S_{i+1})|S_i^j] \tag{6}$$

根据计量经济学的理论，这个估计值就是在标的资产价格S_i^j下的期权持有价值的无偏估计值。另外，本例中选取基函数$L_0(S)=1$；$L_1(S)=S$；$L_2(S)=S^2$作为解释变量，根据实际情况中也可以选取其他形式的基函数：

$$L_0(S)=\exp(-\frac{S}{2});L_1(S)=\exp(-\frac{S}{2})(1-S);$$
$$L_2(S)=\exp(-\frac{S}{2})(1-2S+\frac{S^2}{2}) \tag{7}$$

作为解释变量。

接下来从最后一个行权日开始往前计算权证的最优停时以及每个样本点的期权价值。在到期日T，执行看跌期权的价值为$\max\{X-S_N^j,0\}$。接着，判断在$N-1$时刻是否行权。若期权处于实值状态，即$S_{N-1}^j<X$，则与继续持有期权的价值相比较，若内在价值大于持有价值，则应立即执行期权；否则，继续持有期权。考虑在该时刻期权处于实值的样本子集，近似期权持有价值的回归方程为：

$$y_{N-1}^j=\exp(-r\Delta T)\max\{X-S_N^j,0\}$$
$$=a_1+a_2S_{N-1}^j+a_3{S_{N-1}^j}^2+\mu_j \tag{8}$$

其中，$j\in J_{N-1}$，J_{N-1}是$N-1$时刻所有期权处于实值状态的标的资产价格样本集。在时刻$N-1$的资产价格S_{N-1}^j信息下，比较内在价值$\max\{X-S_{N-1}^j,0\}$与继续持有期权的价值$\hat{y}_{N-1}^j$就可做出是否执行期权的决策。同理，我们可倒推继续求得时刻$N-2,N-3,\cdots,0$的期权持有价值。对于每条样本路径j，期权或是在最优停时$t_j^*\in\{0,1,\cdots,N\}$执行，或是永不执行。具体设计程序时，令初值$t_j^*=N$，在时刻$N-1$，如果继续持有期权，则t_j^*不变；如果执行期权，则$t_j^*=N-1$，依此类推。每个样本上就只有一个最优停时，每次更新t_j^*，最后便求得每条样本路径上的最优停时。

第三步：将每个样本的最优停时的期权价值按照无风险利率折现并求平均值

经过M次模拟后，得到M条标的资产价格的样本路径，以及每条样本路径上的最优停时t_j^*和在该时刻的期权价值：

$$I(S_{t_j^*}^j)=\max\{X-S_{t_j^*}^j,0\} \qquad j=\{1,2,\cdots,M\} \tag{9}$$

不同的样本有着不同的最优停时时刻，因此期权价值的贴现因子$e^{-rt_j^*}$也不同，所以应分别进行贴现求均值，最终得到初始时刻期权价值的最小二乘蒙特卡洛模拟值：

$$P=\hat{E}^Q[exp(-rt^*)f(S_0,S_1,\cdots,S_{t^*},\cdots,S_T)]$$
$$=\frac{\sum_{j=1}^{M}\exp(-rt_j^*)I(S_{t_j^*}^j)}{M} \tag{10}$$

（三）带稀释效应的BS模型

BS模型是期权定价的基础模型。然而由于认股权证的特殊性，不能够直接利用BS模型进行计算，因为认股权证的行权会对股价产生稀释作用。带稀释效应的BS模型便是考虑了这一点。目前有一家上市公司拥有N股的流通股份以及M份认股权证，认股权证的行权比例为L，同时T时刻股价为S_T，X为权证的行权价格。则可得在认股权证瞬时行权后，公司的股价为：

$$S_{T^*}=\frac{NS_T+MLX}{N+ML} \tag{11}$$

由于权证的持有者只有在行权价值大于零时才会行权，同时根据无风险中性定价原理②，r为无风险利率，可得到权证的价值为：

$$W=\frac{NL}{N+ML}e^{-rT}E\{\max[(S_T-X),0]\} \tag{12}$$

又有

$$S_T=Sexp[\varepsilon\sigma\sqrt{T}+(r-\frac{\sigma^2}{2})T]$$

可得权证的价值公式为：

$$W=\frac{NL}{N+ML}(SN(d_1)-Xe^{-rT}N(d_2)) \tag{13}$$

其中

$$d_1=\frac{\ln(S_0/X)+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}},d_2=\frac{\ln(S_0/X)+(r-\frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

（四）LSM方法的优点

由于以往的权证定价模型主要是基于BS模型，因此也必然受到BS模型的相应制约，相比较而言LSM有以下两个方面的优点。

（1）LSM模型是通过模拟股价的整条运动路径而得到最后的权证价值，由于分离式可转债的权证基本上都属于百慕大式期权，LSM方法能够将每个行权日的价格算出而得到最后的价格，其他的定价模型主要是基于BS模型，因此大部分都将其按照欧式期权的方法近似处理。

（2）LSM方法是基于对原始数据的模拟，而以往的定价模型都是建立在许多假设前提的基础上来进行的，若只要假设条件中的一项不符合要求，将会对结果的真实性产生影响，而现实当中这些假设条件是很难同时满足的。因此相对而言，LSM方法的准确度更好。[3]

由于LSM方法的上述优点，使得LSM方法的定价准确性

更好。因为带稀释效应的BS模型是目前在权证定价领域中应用最多的模型,因此在本文的实证结果分析部分将利用稀释的BS模型得出的结果与LSM方法得出的结果进行比较,能够发现LSM方法能够更好地拟合实际值。

二、基于LSM方法的我国分离式可转债定价分析

(一)样本数据的选取

1.LSM方法中数据的选取

由于2010年至2018年都没有分离式可转债的发行,因此本文选取了从2008年开始之后发行的一共十支分离式可转债,它们分别是08上汽债、08中远债、08石化债、08上港债、08青啤债、08国电债、08康美债、08宝钢债、08葛洲债、08江铜债,基本上囊括了2008年及其之后发行的所有数据。本文主要是将分离式可转债分为纯债和权证部分,并对其每个部分进行单独定价得出理论值,最后与实际值进行比较。这些债券的票面利率在0.6%~1%之间,权证部分均属于百慕大式期权,且都是在权证存续期的最后五个交易日为行权日的期权。纯债部分都是每年付息,债券存续期的最后一个交易日还本付息。在计算纯债价值时,本文选用的折现率是发行日相近期限相同的公司债的到期收益率③为其折现率,在计算权证价值时,本文选用的市场利率为到期期限相近的国债利率。若企业存在分红配股的情况,便对原来的股价数据进行调整,具体操作方法为若是分红则将分红的数量,从分红日开始重新加在分红日开始之后的股价上;如为配股,则从配股之日开始起,进行恢复除权。总体思路,便是将分红配股之日开始之后的股价进行按照之前除权除息的大小进行上调。[4-6]

在实证研究过程中,分别运用公式(1)和公式(10),对分离式可转债的纯债部分与权证部分分别进行定价,并将得出来的结果与实际值进行比较。MAE(平均绝对误差)是指所有测量的绝对误差取绝对值后所求的平均值,MAPE(平均绝对百分比误差)是指所有测量值相对实际值偏离百分比的绝对值的平均值,MAE和MAPE是用来计算两种值之间的误差程度的,在本文的最后将分别用它们来计算误差程度。

2.带稀释效应的BS模型中数据的选取

本文将对LSM模型所得结果与带稀释效应的BS模型所得结果进行对比分析,在运用带稀释的BS模型时,纯债中折现率选用的是同风险等级同期限的公司债券到期收益率,权证部分根据发行公司在外流通股、认股权证上市流通数、行权比例、行权价格、分离式可转债对应标的股票收盘价、权证有效期、无风险利率以及标的股票波动率计算得到。

(二)实证分析

1.LSM模型理论值与实际值的对比分析

利用LSM模型对我国上市公司分离式可转债进行实证分析,选取分离式可转债在发行首日纯债与认股权证的首日收盘价为其实际价格可以得到:(见表1所示)。

根据以上结果本文计算出纯债部分的MAE、MAPE分别为2.779、3.8%,权证部分的MAE、MAPE分别为1.4687、34.45%,由此可见权证部分实际价值与理论价值的平均绝对百分比偏差比较大,并且大部分的权证实际价值要高于其理论价值,说明我国市场上权证的价值大部分都是脱离其真实价值的,投机气氛比较浓。同时,纯债的实际价值与理论价值偏差较小,这说明两者的吻合度还是比较高,因此纯债部分的价值定价比较合理。

2.LSM模型、带稀释效应的BS模型理论价值与真实价格比较

带稀释效应的BS模型是目前在分离式可转债定价中应用最广泛的定价模型,为了证实LSM方法的效果,本文将LSM方法得到的结果与用带稀释效应的BS模型得到的结果相对比从而来验证LSM模型的优越性。(见表2所示)

根据以上结果我们可以计算出LSM模型MAE、MAPE分别为1.59599、1.98%,而带稀释效应的BS模型的MAE、MAPE分别为1.9996、2.47%,由此可见LSM模型的平均绝对误差和平均绝对百分比误差均小于带稀释效应的BS模型,也就是说,LSM模型的精确度要高于带稀释效应的BS模型。

三、结语

本文从分离式可转债的纯债部分与权证部分两方面分别研究了其定价的合理性,总体而言,纯债部分定价相对合理而权证部分则投机气氛较浓。

一是纯债部分的市场定价相对较为合理,主要原因是纯债的收入相对稳定,在我国也是比较成熟的金融品种,因此相对而言投资者对其的炒作热情并不是很激烈,因此纯债便能维持较合理的定价。

二是认股权证是主要是对未来的一种选择权,因此基于它的不确定性以及新颖性,投资者对其的炒作气氛也显得格外浓烈。本文的研究结论也表明了基本上权证部分的市场价格都高于其理论值。

附录A LSM定价MATLAB程序

```
function [AV st]=lsm_exp(s0,r,sigma,T,dt,n,k)
t=(0:dt:T)';
st=s0*ones(T/dt+1,n);
for j=1:n
  w=randn(1,T/dt)';
  for i=1:T/dt
    st(i+1,j)=st(i,j)*exp((r-0.5*sigma^2)*dt+sigma*dt^0.5*w(i));
  end
end
plot(t,st)
x=round(T/dt);
for j=1:n
  if st(x,j)>100
    for i=x:-1:(x-6)
      st(i,j)=0;
    end
  else
    continue
  end
end
for j=1:n
  if  st(x,j)-k>0
    h=st(x,j)-k;
```

表1 分离式可转债理论价值与实际价值比较

证券名称	纯债实际价值	纯债理论价值	权证实际价值	LSM权证价值
08上汽债	70.74	71.92	12.850	9.2934
08中远债	71.96	75.35	10.586	6.5765
08石化债	76.52	75.35	2.535	4.4421
08上港债	86.39	87.83	2.745	1.9896
08青啤债	73.40	75.35	3.688	4.5827
08国电债	73.50	76.34	3.754	1.8152
08康美债	71.62	75.35	2.307	2.5061
08宝钢债	74.86	75.35	1.952	1.7032
08葛洲债	68.75	74.36	2.710	1.6027
08江铜债	76.06	70.07	1.500	2.8426

表2 LSM模型与带稀释效应的BS模型理论价值比较

证券名称	分离式可转债实际价值	LSM模型理论价值	带稀释效应BS模型理论价值
08上汽债	83.59	80.0334	78.9161
08中远债	82.326	78.3165	76.8545
08石化债	75.275	77.1821	74.777
08上港债	76.485	75.7296	75.1936
08青啤债	78.428	79.3227	76.4433
08国电债	79.494	77.5552	77.7735
08康美债	79.047	79.2461	77.9594
08宝钢债	79.692	79.4432	78.6012
08葛洲债	81.45	80.3427	80.1473
08江铜债	81.24	82.5826	80.365

```
    else
        h=0;
    end
    for i=x:-1:(x-5)
        if st(i,j)-k>=h/(exp(r*dt))
            h=st(i,j)-k;
        else
            h=h/(exp(r*dt));
        end

end
    m(j)=h/(exp(r*dt*(x-5)));
    end
    AV=sum(m)/n;
```

注释

①百慕大式期权是指只能在约定的时间段内进行行权的期权。

②无风险中性定价原理是指无论投资者的风险偏好和预期收益率如何，统一由风险中性偏好和无风险利率来代替。

③到期收益率(Yield to Maturity，YTM)又称最终收益率是指可以使投资购买债券获得的未来现金流量的现 值等于债券当前市价的贴现率。

参考文献

[1]陈暮紫，蒋勇，陈敏等.基于非参数估计的权证定价方法及应用[J].系统工程理论与实践，2013(8).

[2]李少华，杜鹏，董力强.分离式可转换债券定价模型及实证分析[J].商业经济，2010(8).

[3]闫华红，董旭.我国可分离交易可转债的异动现象分析[J].财政研究.2013(4).

[4]Andreas，F.，Michael，K.，On the consistency of regression-based monte carlo methods for pricing bermudan options in case of estimated financial models[J]. Mathematical Finance，2013，110(3):12-25.

[5]Boyle，P.，Adam，W.，Pricing bermudan options using low-discrepancy mesh methods[J].Quantitative Finance，2013，13(6):841-860.

[6]Lim，H.，Lee，S.，Kim，G.，Efficient pricing of bermudan options using recombining quadratures[J].Journal of Computational and Applied Mathematics，2014，271(4):195-205.

[7]Lmai，J.，Comparison of low discrepancy mesh methods for pricing Bermudan options under a Lévy process[J]. Mathematics and Computers in Simulation，2014，100(1):54-71.